Уравнения гравитационного поля в теории относительности

Федосин С.Г., Ким А.С.

В отличие от аксиоматики общей теории относительности гравитация в инерциальных системах отсчёта рассматривается как реальное поле, характеризующееся соответствующими потенциалами, ковариантными уравнениями поля и лоренц-инвариантностью. При переходе к неинерциальным системам отсчёта за счёт присутствия вещества и плотности энергии поля метрический тензор становится отличным от метрического тензора пространства Минковского, а физические явления меняют свой вид. В этом случае тяготение можно представить как интегральный эффект взаимодействия тел друг с другом посредством гравитационного и электромагнитного полей.

В соответствии с устоявшейся традицией считается, что пространство-время вблизи гравитирующих тел искривлено, является неевклидовым и описывается с помощью общей теории относительности (ОТО), в то время как специальная теория относительности (СТО) имеет дело с плоским пространством-временем Минковского. В ОТО все системы отсчёта по определению являются неинерциальными, поскольку каждая масса как бы генерирует вокруг себя поле, меняющее свойства пространства-времени от точки к точке. Решение основного уравнения ОТО для метрики, уравнения Эйнштейна-Гильберта, в случае слабого поля вблизи тяготеющего тела даёт поправку к компоненте g_{00} метрического тензора, которая интерпретируется как скалярный гравитационный потенциал. Гравитационное ускорение получается как градиент этого потенциала, взятый с обратным знаком, в результате мы приходим к классическому закону Ньютона. В отличие от гравитационного электромагнитное поле является несколько более фундаментальным – оно лоренц-инвариантно, преобразуется по известным законам в любых системах отсчёта, всегда обладает определёнными скалярным и векторным потенциалами и даёт свой собственный вклад в метрику. Целью данной работы является построение лоренц-инвариантной теории гравитационного поля как настоящего физического поля, участвующего наравне с веществом и другими полями в образовании метрических свойств пространства-времени.

Как известно, явления в неинерциальных системах отсчёта можно рассматривать и из инерциальных систем отсчёта, вводя силы инерции или соответствующие гравитационные силы. В противоположность подходу, принятому в ОТО, будем считать потенциал поля первичным понятием, а плотности энергии и импульса вещества и поля

– ответственными за отклонение наблюдаемой метрики пространства- времени от метрики пространства Минковского.

Скалярный гравитационный потенциал в неподвижной инерциальной системе отсчёта S_1 имеет вид:

$$\psi_1 = -\frac{\gamma M}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} = -\frac{\gamma M}{r_1},$$

где координаты x_1, y_1, z_1 задают точку, где измеряется потенциал, а M – масса гравитирующего тела. Расчёт скалярного потенциала этого же гравитационного поля в движущейся со скоростью $\mathbf{V}$ инерциальной системе отсчёта S может быть осуществлён двумя способами. По одному из них используется общее решение Льенара и Вихерта [1] для запаздывающего поля, что даёт следующее:

(1)
$$\psi = -\frac{\gamma M}{\sqrt{1 - V^2/c^2}\left(\frac{(x - Vt)^2}{1 - V^2/c^2} + y^2 + z^2\right)^{1/2}}.$$

Формулу (1) можно получить и с помощью лоренцевского преобразования из системы отсчёта S_1 в S с помощью 4-вектора потенциала D_i, в котором кроме скалярного потенциала ψ находится векторный потенциал $\boldsymbol{D}$:

$$D_i = \left(\frac{\psi}{c}\ , -\boldsymbol{D}\right).$$

Потенциал $\boldsymbol{D}$ согласно [2] дополняет потенциал ψ до 4-вектора и учитывает изменение гравитационного поля за счёт любого движения массы и запаздывания гравитационного взаимодействия. Точно также векторный потенциал в электродинамике ответственен за возникновение электромагнитного поля даже в том случае, когда скалярный потенциал равен нулю из-за компенсации положительных и отрицательных зарядов [3].

Приравнивая дивергенцию контрвариантного 4-вектора D^i к нулю, с помощью метрического тензора g^{ik} находим калибровочное условие для потенциалов в СТО:

$$\partial_i D^i = \partial_i g^{ik} D_k = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0.$$

Антисимметричный тензор гравитационного поля можно построить из 4-вектора потенциала D_i :

$$F_{ik} = \partial_i D_k - \partial_k D_i = \begin{pmatrix} 0 & \frac{G_x}{c} & \frac{G_y}{c} & \frac{G_z}{c} \\ -\frac{G_x}{c} & 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ -\frac{G_y}{c} & \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\frac{G_z}{c} & -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Компонентами тензора F_{ik} являются напряжённость гравитационного поля $\boldsymbol{G}$ и кручение $\boldsymbol{\Omega}$, выражающиеся через потенциалы следующим образом:

$$\mathbf{G} = -\nabla \psi - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \boldsymbol{D}.$$

Умножая плотность массы в покоящейся системе отсчёта на 4-вектор скорости u_i, получим 4-вектор плотности импульса:

$$J_i = \rho_0 u_i = \left(\frac{\rho_0 c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, -\frac{\rho_0 \boldsymbol{V}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \right) = (\rho c, -\boldsymbol{J}).$$

Действие четырёхмерного даламбертиана на вектор потенциала даёт вектор, пропорциональный 4-вектору J_i:

(2) $$\square^2 D_i = -\frac{4\pi\gamma}{c^2} J_i .$$

Уравнения (2) являются волновыми уравнениями для потенциалов ψ и $\boldsymbol{D}$ гравитационного поля, а их решения имеют вид:

$$\psi(1,t) = -\gamma \int \frac{\rho(2,t')}{R_{12}} d\text{v}_2, \qquad \boldsymbol{D}(1,t) = -\frac{\gamma}{c^2} \int \frac{\boldsymbol{J}(2,t')}{R_{12}} d\text{v}_2,$$

здесь потенциалы в точке 1 в момент времени t находятся путём интегрирования распределения масс (массовых токов) в области с объёмом v_2 в более ранний момент времени $t' = t - \frac{R_{12}}{c}$, R_{12} – текущее расстояние между точкой 1 и элементами объёма $d\text{v}_2$ в момент времени t', c – скорость распространения гравитационного воздействия.

Уравнения гравитационного поля получаются путём дифференцирования тензора F_{ik}:

$$(3) \qquad \partial_n F_{ik} + \partial_i F_{kn} + \partial_k F_{ni} = 0, \qquad \partial_k F^{ik} = \frac{4\pi\gamma}{c^2} J^i.$$

В раскрытом виде уравнения (3) содержат векторы $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{\Omega}$:

$$(4) \qquad \begin{aligned} &\nabla \cdot \boldsymbol{G} = -4\pi\gamma\rho, \qquad &&\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0, \\ &\nabla \times \boldsymbol{G} = -\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t}, \qquad &&c^2\, \nabla \times \boldsymbol{\Omega} = -4\pi\gamma \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Если определить гравитационную силу выражением $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{G} + m\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{\Omega}$, где m – масса частицы, то уравнение движения частицы в СТО будет иметь вид:

$$\frac{d p^i}{d t_0} = F^{ik} p_k,$$

здесь p^i и p_k – контрвариантный и ковариантный 4-импульсы соответственно,

$$p_k = mu_k = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, -\frac{m\mathbf{V}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \right), \quad dt_0 = \frac{ds}{c} = \sqrt{1-V^2/c^2}\ dt, \quad ds – \text{интервал.}$$

Как показывает расчёт в [2], при параллельном движении двух масс за счёт векторного потенциала $\boldsymbol{D}$ и соответствующего ему кручения $\boldsymbol{\Omega}$ между массами возникает сила отталкивания. Данная сила при большой скорости движения масс вычитается из силы гравитационного притяжения таким образом, что при достижении скорости света суммарная сила между массами стремится к нулю: $F = F_0 \sqrt{1-V^2/c^2}$, здесь F_0 – сила притяжения между покоящимися массами. Одновременно интервалы времени движущихся относительно лабораторной системы отсчёта часов согласно СТО будут длиннее: $dt = \dfrac{dt_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$. Приращения поперечных относительно движения импульсов масс в лабораторной и сопутствующей системах отсчёта оказываются одинаковыми: $dp = F\,dt = F_0\,dt_0 = dp_0$, что как раз и следует из СТО.

На основе тензора F_{ik} и метрического тензора g_{ik} можно построить тензор плотности энергии-импульса гравитационного поля:

$$U^{ik} = \frac{c^2}{4\pi\gamma}\left(-g^{im} F_{mr} F^{rk} + \frac{1}{4} g^{ik} F_{rm} F^{mr} \right). \tag{5}$$

Компонента U^{00} в тензоре (5) представляет собой плотность энергии гравитационного поля:

$$U^{00} = -\frac{1}{8\pi\gamma}\left(G^2 + c^2 \Omega^2 \right),$$

а компоненты U^{01}, U^{02}, U^{03}, умноженные на скорость c, дают вектор плотности потока энергии поля $\boldsymbol{S} = -\dfrac{c^2}{4\pi\gamma} \boldsymbol{G} \times \boldsymbol{\Omega}$.. Плотность энергии поля и вектор $\boldsymbol{S}$ связаны между собой:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{S} = -\frac{\partial U^{00}}{\partial t} - \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{G}.$$

Смысл этого соотношения заключается в том, что поток энергии в некоторый объём через его поверхность приводит к увеличению гравитационной энергии в этом объёме и (или) к совершению работы по ускорению вещества.

Приведённые расчёты показывают, что в инерциальных системах можно построить самосогласованную лоренц-инвариантную теорию гравитационного поля, в соответствии с уравнениями (4) справедливую вплоть до релятивистских скоростей движения тел. Следовательно, уравнения гравитационного поля с помощью метрического тензора g^{ik} можно записать и в ковариантном виде. В частности в уравнении Эйнштейна-Гильберта, в тензор плотности энергии следует включить тензор U^{ik}, содержащий согласно (5) не только напряжённость поля $\boldsymbol{G}$, но и кручение гравитационного поля $\boldsymbol{\Omega}$:

$$R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R = \frac{8\pi\gamma}{c^4} \left(t^{ik} + W^{ik} + U^{ik} \right), \tag{6}$$

здесь R^{ik} – тензор Риччи, R – скалярная кривизна, t^{ik}, W^{ik}, U^{ik} – тензоры плотности энергии-импульса вещества, электромагнитного поля и гравитационного поля соответственно, космологическая постоянная не учитывается и считается равной нулю. Решениями уравнений (6) являются зависимости компонент метрического тензора от координат и времени, показывающие отклонение от метрического тензора пространства Минковского, причём симметричность формы уравнений и однозначность их решений обеспечивается в так называемых гармонических координатах, которые можно считать координатами пространства Минковского.

Уравнения движения материи находятся из равенства нулю ковариантной производной от тензора материи:

$$\nabla_k \left(t^{ik} + W^{ik} + U^{ik} \right) = 0. \tag{7}$$

Поскольку в (7) в тензоре U^{ik} находится кручение $\boldsymbol{\Omega}$, то решения этого уравнения приобретают некоторые добавки, существенные при больших скоростях. Однако в условиях Солнечной системы и обычных скоростях движения тел поправки к метрическому тензору оказываются весьма незначительными. В [2] рассмотрена метрика внутри и за пределами однородного по плотности массивного сферического тела с учётом вклада от гравитационного поля. Было найдено, что в дополнение к метрике

Шварцшильда, содержащей члены вида $\frac{2\gamma M}{rc^2}$, появляются также члены второго порядка малости, содержащие в знаменателе c^4. Практически все тесты ОТО – смещение перигелия Меркурия, искривление лучей света и задержка их распространения в гравитационном поле Солнца, изменение частоты света при распространении между точками с разными гравитационными потенциалами и другие аналогичные опыты подтверждены только на уровне первого порядка. По-видимому, увеличение точности измерений со временем позволит повести проверку как ОТО, так и предлагаемого нами подхода.

Обычно полагают, что в ОТО тяготение описывается как воздействие материи на свойства пространства-времени, которые в свою очередь влияют на движение тел. В свете вышеизложенного данное положение переформулируется в том смысле, что изменение количества вещества, электромагнитного и гравитационного полей изменяет как свойства пространства-времени, отмечаемые наблюдателем, так и видимые траектории движения тел. Таким образом, хотя тяготение формально можно сводить к искривлению пространства-времени и метрики под действием всевозможных источников энергии вещества и поля, но в то же время гравитацию следует считать самостоятельным физическим полем, которое вместе с движущимся веществом и электромагнитным полем задаёт метрику в заданной точке и определяет движение тел. Отличие гравитации от тяготения тогда заключается в том, что последнее есть интегральный эффект от действия гравитационных и электромагнитных полей, связанных соответственно с тяготеющими массами и заряженными телами.

Литература

[1] *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Том 6. М.: Мир, 1977. / перевод с англ. *Feynman R., Leighton R., Sands M.* The Feynman lectures on physics. V.2. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Reading, Massachusetts, Palo Alto. London. 1964.

[2] *Федосин С.* Физика и философия подобия от преонов до метагалактик. Пермь: Стиль-МГ, 1999.

[3] *Ландау Л. Д. , Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т.2. Теория поля. М.: Наука, 1988.